

Розділ 14

Приклад 14.1

Отримати формулу (закон) Релея-Джинса із формули Планка

Розв'язання: $\hbar\omega \ll kT$

$$e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} = 1 + \frac{\hbar\omega}{kT} + \dots \approx 1 + \frac{\hbar\omega}{kT}$$

$$U(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \cdot \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} \approx \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\hbar\omega}{kT} - 1} = \frac{kT}{\pi^2 c^3} \omega^2$$

Приклад 14.2

Отримати закон вимірювання Віна із формули Планка

Розв'язання: $U(\nu, T) = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$

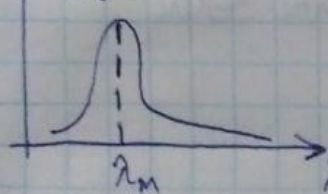
при $h\nu \gg kT \Rightarrow U(\nu, T) = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} e^{-\frac{h\nu}{kT}}$

Приклад 14.3

Отримати закон зміщення Віна із формули Планка

Розв'язання: $U(\omega, T) \frac{d\omega}{d\lambda} = U(\lambda, T) = \frac{8\pi^5 h^6}{15} \frac{1}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}$

$U(\lambda, T)$



$$\frac{\partial U(\lambda, T)}{\partial \lambda} = 0; \quad \frac{hc}{kT\lambda} = x \Rightarrow \frac{x \cdot e^x}{e^x - 1} = 5$$

Методом наближень:

$$x = 4,965$$

$$\lambda_m = \frac{hc}{xkT} = \frac{0,29 \cdot 10^4 \text{ мкм} \cdot \text{К}}{T}$$

$$\Rightarrow b = 0,29 \cdot 10^4 \text{ мкм} \cdot \text{К}$$

стала зміщення Віна

Приклад 14.4

Отримати формулу Стефана-Больцмана із формули Планка

Розв'язання:

$$u(T) = \frac{dw}{dv} = \int_0^\infty u(\omega, T) d\omega = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \frac{\omega^3 d\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}$$
$$\frac{\hbar\omega}{kT} = x \Rightarrow u(T) = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \left(\frac{kT}{\hbar}\right)^4 \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \left(\frac{kT}{\hbar}\right)^4 \frac{\pi^4}{15} =$$
$$= \text{const} \cdot T^4, \quad \text{const} = \pi^2 \cdot k^4 / (15 \hbar^3 c^3) = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт} / (\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$$

Приклад 14.5

Відома, що максимум випромінювання Сонця припадає на $\lambda = 0,48 \text{ мкм}$.
Визначити T поверхні Сонця.

Розв'язання: $T = \frac{b}{\lambda_m}$, $b = 2898 \text{ мкм} \cdot \text{К}$ - стала змещення Віна

$$T \approx 6000 \text{ К}$$

Приклад 14.6

Земля випромінює $90,8 \text{ Вт/м}^2$ за 1 с . За якої T АЧТ випромінює таку саму енергію?

Розв'язання: $P = 90,8 \text{ Вт}$ з 1 м^2

$$M_{\text{ен}} = \frac{P}{S} = 90,8 \text{ Дж} / (\text{с} \cdot \text{м}^2), \quad S - \text{площа поверхні Землі}$$

$$T = \sqrt[4]{\frac{M_{\text{ен}}}{\sigma}}, \quad \sigma = 5,67 \text{ Дж} / (\text{с} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$$

$$T = 200 \text{ К}$$

Приклад 14.7

У скільки разів змінилась інтегральна енергетична світність АЧТ, якщо макс випромінювальної здатності спочатку припадає на $\lambda_1 = 0,7 \text{ мкм}$, а при підвищенні температури змістилась на нову $\lambda_2 = 0,5 \text{ мкм}$?

Розв'язання: $\lambda_m \sim \frac{1}{T}$, $M_{\text{ен}} \sim T^4$

$$= M_{\text{ен}1} = \sigma T_1^4 = \sigma \left(\frac{c}{\lambda_{m1}} \right)^4, \quad M_{\text{ен}2} = \sigma T_2^4 = \sigma \left(\frac{c}{\lambda_{m2}} \right)^4$$

$$\frac{M_{\text{ен}1}}{M_{\text{ен}2}} = \left(\frac{\lambda_{m2}}{\lambda_{m1}} \right)^4 = 3,84$$

Приклад 14.8

Енергетична світність АЧТ $M_{\text{ен}} = 3 \text{ Вт/см}^2$. Визнайте довжину хвилі, яка відповідає макс випромінювальної здатності цього тіла.

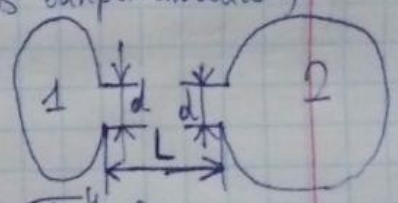
Розв'язання: $\lambda_m = \frac{c}{T} = \frac{c}{\sqrt[4]{\frac{M_{\text{ен}}}{\sigma}}} = 3,5 \text{ мкм}$

Приклад 14.9

Є дві порожнини з малими отворами однакових діаметрів $d = 1 \text{ см}$ і абсолютно відбиваючими зовнішніми поверхнями. Відстань між отворами $L = 10 \text{ см}$. У порожнину 1 підтримується стала $T = 1700 \text{ К}$. Визначити T_2 у порожнині 2. (АЧТ є $\cos$ випромінювачем)

Розв'язання: $u = \frac{4}{c} M_{\text{ен}}$

$$W = u \cdot V = \frac{4}{c} M_{\text{ен}} \cdot V = \frac{4}{c} \sigma T^4 V$$



$$P_{1,2} = M_{\text{ен}} \cdot S = \sigma T^4 \cdot S, \quad P_1 = \sigma T_1^4 \cdot S_1$$

$P_{2\text{вх}}$ пов'язаний з P_1 через $d\Omega = \frac{S_2}{L^2}$

$$P_{2\text{вх}} = P_1 \cdot \frac{d\Omega}{2\pi} = \sigma T_1^4 \cdot S_1 \cdot \frac{S_2}{2\pi L^2} \quad \text{також} \quad P_2 = \sigma T_2^4 \cdot S_2$$

$$S_1 = S_2 = S = \pi \frac{d^2}{4}$$

$$P_2 = P_{2\text{вх}} \Rightarrow \sigma T_1^4 \cdot \frac{S^2}{2\pi L^2} = \sigma T_2^4 \cdot S \Rightarrow T_1^4 \cdot \frac{S}{2\pi L^2} = T_2^4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_2 = T_1 \sqrt{\frac{d}{2,3 \cdot L}} = 1700 \text{ K} \sqrt{\frac{1}{2,8 \cdot 10}} \approx 320 \text{ K}$$

Приклад 14.10

Знайти за допомогою формули Планка потужність випромінювання з одиниці поверхні АЧТ, яка припадає на вузький інтервал $\Delta\lambda = 1 \text{ нм}$ поблизу спектрального максимуму випромінювання за $T = 3000 \text{ K}$.

Розв'язання: $\Delta M_\lambda = M_\lambda(\lambda, T)_{\text{max}} \cdot \Delta\lambda$, де $M_\lambda(\lambda, T)_{\text{max}}$ — максимум значення випромінювальної здатності тіла за температури T .

$$M_\lambda(\lambda, T) = \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k T}} - 1}$$

$M_\lambda(\lambda, T)_{\text{max}}$ відповідає довжині хвилі $\lambda_m = \frac{b}{T} \Rightarrow$

$$M_\lambda(\lambda, T)_{\text{max}} = \frac{2\pi h c^2 T^5}{b^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{b k}} - 1} \Rightarrow$$

$$\Delta M_\lambda = \frac{2\pi h c^2 T^5}{b^5} \frac{\Delta\lambda}{e^{\frac{hc}{b k}} - 1} = 0,31 \text{ Вт/см}^2$$

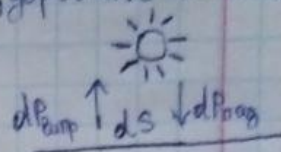
Визначено потужність випромінювання з одиниці поверхні АЧТ, яка припадає на вузький інтервал $\Delta\lambda = 1 \text{ нм}$

Приклад 14.11

До якої температури сонячне світло може нагріти тіло на поверхні Землі? $J = 0,1 \text{ Вт/см}^2$

Розв'язання: Для стану рівноважного теплового випромінювання кількість енергії, що випромінюється тілом, дорівнює кількості енергії, що поглинається тілом.

$$dP_{\text{пад}} = dP_{\text{випр}} \quad , \quad dP_{\text{пад}} = J \cdot dS$$
$$dP_{\text{випр}} = M_{\text{ен}} \cdot dS$$



З закону Стефана-Больцмана: $dP_{\text{випр}} = \sigma T^4 \cdot dS$

$$\sigma T^4 = J \Rightarrow T = \sqrt[4]{\frac{J}{\sigma}} = 364 \text{ K} \approx 90^\circ \text{C}$$

За допомогою дзеркал і лінз можна збільшити температуру нагрівання тіла.